En intégrant sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on obtient :

$$f(\frac{k+1}{n})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathrm{d}x \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \le f(\frac{k}{n})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow (\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})f(\frac{k+1}{n}) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \le (\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})f(\frac{k}{n})$$

Il en résulte que $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$.

b) On a : d'après a) pour tout $1 \le k \le n-1$

$$\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad (*)$$

- $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+f(\frac{4}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$

$$= \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+f(\frac{4}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})-f(\frac{1}{n}))$$

donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$

- $\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x)\mathrm{d}x$

En utilisant la relation de Chasles, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = I(\frac{1}{n})$$

- $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+f(\frac{4}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n}))$

or $f(\frac{n}{n}) = f(1) = 0$